Solution de la Série N^{o}3 : Variables aléatoires : discrètes et continues

Exercice 1
On donne l'univers $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et, sur $(E, \mathcal{P}(E))$ les variables aléatoires définies par la table : Expliciter les événements suivants :

éventualités	1	2	3	4	5	6
X	1	0	1	-1	0	1
Y	2	2	0	1	1	0

1. $[X = 0]$; $[X = 1]$; $[X = 2]$.
2. $[Y = 1]$; $[X \leq 0]$; $[Y > 0]$.
3. $[X = Y]$; $[X < Y]$; $[X \leq Y]$.
4. $[0 < X < 1]$; $[X^2 = 1]$; $[X + Y = 3]$.

Solution : déterminons des événements suivants :

1. $[X = 0]$; $[X = 1]$; $[X = 2]$:
$$\begin{aligned}
[X = 0] &= \{\omega \in E \,/\, X(\omega) = 0\} = \{2; 5\}\\
[X = 1] &= \{\omega \in E \,/\, X(\omega) = 1\} = \{1; 3; 6\}\\
[X = 2] &= \{\omega \in E \,/\, X(\omega) = 2\} = \{\ \ \} = \emptyset
\end{aligned}$$
car pour tout $\omega \in E$, $X(\omega) \neq 2$.
2. $[Y = 1]$; $[X \leq 0]$; $[Y > 0]$:
$$\begin{aligned}
[Y = 1] &= \{\omega \in E \,/\, Y(\omega) = 1\} = \{4; 5\}\\
[X \leq 0] &= \{\omega \in E \,/\, X(\omega) \leq 0\} = \{2; 4; 5\}\\
[Y > 0] &= \{\omega \in E \,/\, Y(\omega) > 0\} = \{1; 2; 4; 5\}.
\end{aligned}$$
3. $[X = Y]$; $[X < Y]$; $[X \leq Y]$:
$$\begin{aligned}
[X = Y] &= \{\omega \in E \,/\, X(\omega) = Y(\omega)\} = \{\ \ \} = \emptyset\\
[X < Y] &= \{\omega \in E \,/\, X(\omega) < Y(\omega)\} = \{1; 2; 4; 5\}\\
[X \leq Y] &= \{\omega \in E \,/\, X(\omega) \leq Y(\omega)\} = \{1; 2; 4; 5\}.
\end{aligned}$$
4. $[0 < X < 1]$; $[X^2 = 1]$; $[X + Y = 3]$:
$$\begin{aligned}
&[0 < X < 1] = \{\omega \in E \,/\, 0 < X(\omega) < 1\} = \{\ \ \} = \emptyset\\
&[X^2 = 1] = [X = 1] \cup [X = -1] = \{\omega \in E \,/\, X(\omega) = 1 \text{ où } X(\omega) = -1\} = \{1; 3; 4; 6\}\\
&[X + Y = 3] = \{\omega \in E \,/\, X(\omega) + Y(\omega) = 3\} = \{1\}.
\end{aligned}$$

□

Exercice 2
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :
$$f(x) = \omega\, x^2, \quad \text{où } \omega \text{ est un réel fixé}$$

1. Rappeler la définition de la densité d'une probabilité P sur un domaine Ω.
2. Déterminer la valeur de ω sachant que f est la densité d'une loi de probabilité P sur $[0, 1]$.
3. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire X de densité f, puis donner une interprétation physique de la variance de X.
4. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère convenablement choisi.
5. Calculer les probabilités $P\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ et $P\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$; représenter ces quantités sur le graphique précédemment tracé.
6. Déterminer le réel a tel que :

$$P\left(\left[\frac{1}{2}, a\right]\right) = P\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right).$$

Solution : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par : $f(x) = \omega\, x^2, \quad$ où ω est un réel fixé

1. La définition de la densité d'une probabilité P sur un domaine Ω : Une fonction $h : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$ est appelée **densité de probabilité d'une variable aléatoire** si elle vérifie les deux conditions suivantes :
   i) $h(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathcal{D}$ soit la fonction h est positive sur son domaine de définition $\mathcal{D}$,
   ii) $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} h(t)dt = 1$.
2. La valeur de ω pour que f soit la densité d'une loi de probabilité P sur $[0, 1]$: en effet $\mathcal{D} = [0; 1]$ et pour tout $t \in [0; 1]$ on a $f(t) = \omega t^2 \geq 0$; alors la première condition est $\omega > 0$. Il reste à voir aussi qu'il faut que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 1$; alors $\displaystyle\int_0^1 \omega t^2 dt = 1$ donc

$$\omega = \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 t^2 dt} = 3$$

   d'où la fonction est définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par : $f(t) = 3t^2$.
3. – La moyenne, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire X de densité f : en effet, par définition on a

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 t f(t)dt = \int_0^1 3t^3 dt = \frac{3}{4}.$$

   D'après la propriété de Hygens, on a $\sigma^2(X) := \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, alors $\sigma^2(X) := \mathbb{E}(X^2) - \frac{9}{16}$, il suffit donc de calculer $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 t^2 f(t)dt = \int_0^1 3t^4 dt = \frac{3}{5}$$

   donc

$$\sigma^2(X) := \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48 - 45}{80} = \frac{3}{80}.$$

   L'écart-type est la racine carrée positive de la variance, soit $\sigma(X) = \frac{\sqrt{15}}{20}$.

   – L'interprétation physique de la variance de X : la variance est un indice de dispersion et pour tout $k \geq 1$, les intervalle de type $[\mathbb{E}(X) - k\sigma(X); \mathbb{E}(X) + k\sigma(X)]$ s'appellent des intervalles de confiance selon la loi de densité f. Et, pour $k = 1$, il vient

$$[\mathbb{E}(X) - k\sigma(X); \mathbb{E}(X) + k\sigma(X)] = \left[\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{15}}{20}; \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{15}}{20}\right] = [0.5564; 0.9436]$$

4. La représentation graphique de la fonction f dans un repère convenablement choisi :

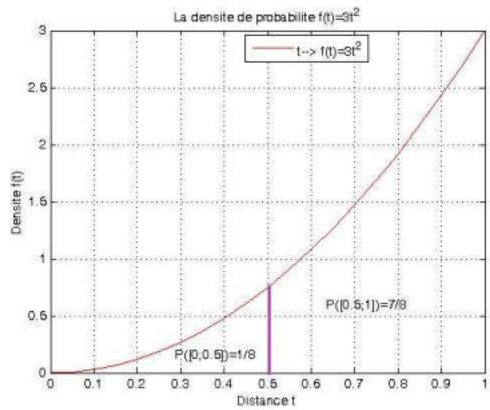

FIGURE 1 – Les courbes de la densité $f(t) = 3t^2$ pour $t \in [0; 1]$ et la représentation des probabilités $P\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ et $P\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$

5. Calculons les probabilités $P\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ et $P\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$: en effet,

$$P\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \int_0^{1/2} 3t^2 dt = \frac{1}{8}$$
$$P\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \int_{1/2}^{1} 3t^2 dt = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Voir les quantités calculées sur la Figure 1.

6. Déterminons le réel a tel que $P\left(\left[\frac{1}{2}, a\right]\right) = P\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$: en effet, on a

$$a^3 - \frac{1}{8} = \int_{1/2}^{a} 3t^2 dt = P\left(\left[\frac{1}{2}, a\right]\right) = P\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \int_0^{1/2} 3t^2 dt = \frac{1}{8}$$

donc $a^3 = \frac{3}{8}$; d'où $a = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$

□

Exercice 3 *(Loi de Poisson)*
La v.a. X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, suit une loi de Poisson lorsque :

$$f_X(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

où λ désigne une quantité positive appelée **paramètre** de la loi.

1. Déterminer la moyenne, la variance et l'écart-type de X.
2. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence qui donne $f_X(k)$ en fonction de $f_X(k-1)$, ainsi que celle donnant $F_X(k) = P(X \leq k)$.

Solution : On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson, notée $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, si :

i) $X : \Omega \mapsto \mathbb{N}$,

ii) $P([X = k]) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, où λ désigne une quantité positive appelée **paramètre** de la loi.

1. La moyenne, la variance et l'écart-type de X :
   - Par définition, la moyenne est $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq 0} kP([X=k])$, alors

     $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq 0} kP([X=k]) = \sum_{k\geq 0} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

     par un changement d'indice, on pose $\ell = k-1$, on obtient

     $$\mathbb{E}(X) = \lambda e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{\ell\geq 0}\frac{\lambda^\ell}{\ell!}}_{e^\lambda} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}$$

     d'où $\mathbb{E}(X) = \lambda$.
   - d'après la propriété de Hygens, la variance $\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, alors $\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \lambda^2$. Or $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \lambda$, alors il suffit de calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$,

     $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k\geq 0} k(k-1)P([X=k]) \\ &= \sum_{k\geq 0} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k\geq 2}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\end{aligned}$$

     par un changement d'indice, on pose $\ell = k-2$, on obtient

     $$\mathbb{E}(X(X-1)) = \lambda^2 e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{\ell\geq 2}\frac{\lambda^\ell}{\ell!}}_{e^\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2$$

     donc $\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$, d'où $\sigma^2(X) = \lambda$.
   - L'écart-type est la racine carrée positive de la variance, soit $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$,
   - la relation de récurrence qui donne $f_X(k)$ en fonction de $f_X(k-1)$:
     On a

     $$f_X(k) = P([X=k]) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{k}\left[\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}\right]$$

     d'où $f_X(k) = \dfrac{\lambda}{k}f_X(k-1)$.
   - la relation de récurrence qui donne $F_X(k) = P([X \leq k])$:
     Pour tout $k \geq 0$, on a $[X\leq k] = [X \leq k-1] \cup [X=k]$ avec $[X \leq k-1]$ et $[X=k]$ sont deux événements disjoints, donc

     $$\begin{aligned}F_X(k) &= P([X\leq k]) = P([X\leq k-1]) + P([X=k]) \\ &= F_X(k-1) + \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\end{aligned}$$

     d'où $F_X(k) = F_X(k-1) + f_X(k)$.

□

Exercice 4

On considère sur un ensemble Ω deux variables aléatoires X et Y dont la loi conjointe est donnée (partiellement) par le tableau ci-dessous. On précise que les lois de X et Y sont toutes deux uniformes (c'est-à-dire que chaque valeur possible a la même probabilité).

1. Déterminer les ensembles images de X et Y. Ces deux variables aléatoires X et Y sont-elles discrètes ou continues ?
2. Compléter le tableau.

Y \ X	-1	0	1	2
-2	$\frac{1}{40}$	$\frac{2}{40}$	$\frac{3}{40}$	
-1	$\frac{2}{40}$	$\frac{1}{40}$		
0			$\frac{1}{40}$	$\frac{2}{40}$
1		$\frac{3}{40}$		$\frac{1}{40}$

3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution : Soit Ω un univers et X et Y deux variables aléatoires sur Ω dont la loi conjointe est donnée (partiellement) par le tableau ci-dessous. On précise que les lois de X et Y sont toutes deux uniformes (c'est-à-dire que chaque valeur possible a la même probabilité).

1. Les ensembles images de X et Y sont $J_X = X(\Omega) = \{-1; 0; 1; 2\}$ et $J_Y = Y(\Omega) = \{-2; -1; 0; 1\}$, respectivement. Les ensembles J_X et J_Y sont finaux dont le cardinal 4, alors X et Y sont deux variables aléatoires discrètes.
2. Les événements ont la même probabilité, c'est à dire qu'il s'agit de la loi uniforme discrète ; à savoir que les lois marginales de X et Y sont

$$P([X = k]) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P([Y = \ell]) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{4}$$

pour tous $k \in \{-1; 0; 1; 2\}$ et $\ell \in \{-2; -1; 0; 1\}\cdot$ Alors, on peut remplir le tableau facilement en résolvant des équations du premier degré à un seul inconnu.

Y \ X	-1	0	1	2	
-2	$\frac{1}{40}$	$\frac{2}{40}$	$\frac{3}{40}$	a	$\to \frac{1}{4}$
-1	$\frac{2}{40}$	$\frac{1}{40}$	b	c	$\to \frac{1}{4}$
0	d	e	$\frac{1}{40}$	$\frac{2}{40}$	$\to \frac{1}{4}$
1	f	$\frac{3}{40}$	g	$\frac{1}{40}$	$\to \frac{1}{4}$
	$\downarrow \frac{1}{4}$	$\downarrow \frac{1}{4}$	$\downarrow \frac{1}{4}$	$\downarrow \frac{1}{4}$	1

Pour cela, on peut voir que

$$\begin{aligned} \Omega &= [X = -1] \cup [X = 0] \cup [X = 1] \cup [X = 2] \\ \Omega &= [Y = -2] \cup [Y = -1] \cup [Y = 0] \cup [Y = 1] \end{aligned}$$

et pour tout $k \in \{-1; 0; 1; 2\}$ et $\ell \in \{-2; -1; 0; 1\}$ on a

$$\begin{aligned} &[X = k] = [X = k] \cap \Omega \\ &= ([X = k] \cap [Y = -2]) \cup ([X = k] \cap [Y = -1]) \cup ([X = k] \cap [Y = 0]) \cup ([X = k] \cap [Y = 1]) \\ &= [(X, Y) = (k, -2)] \cup [(X, Y) = (k, -1)] \cup [(X, Y) = (k, 0)] \cup [(X, Y) = (k, 1)] \end{aligned}$$

ceci d'une part et d'autre on a

$$
\begin{aligned}
&[Y=\ell]=[Y=\ell]\cap\Omega\\
&=([Y=\ell]\cap[X=-1])\cup([Y=\ell]\cap[X=0])\cup([Y=\ell]\cap[X=1])\cup([Y=\ell]\cap[X=2])\\
&=[(X,Y)=(-1,\ell)]\cup[(X,Y)=(0,\ell)]\cup[(X,Y)=(1,\ell)]\cup[(X,Y)=(2,\ell)]
\end{aligned}
$$

donc pour tout $k\in\{-1;0;1;2\}$ et $\ell\in\{-2;-1;0;1\}$ on a

$$
\begin{aligned}
P([X=k]) &= P([(X,Y)=(k,-2)])+P([(X,Y)=(k,-1)])\\
&\quad +P([(X,Y)=(k,0)])+P([(X,Y)=(k,1)])\\
P([Y=\ell]) &= P([(X,Y)=(-1,\ell)])+P([(X,Y)=(0,\ell)])\\
&\quad +P([(X,Y)=(1,\ell)])+P([(X,Y)=(2,\ell)])
\end{aligned}
$$

par exemple, pour $\ell=-2$, on a

$$\frac{1}{4}=P([Y=-2])=\frac{1}{40}+\frac{2}{40}+\frac{3}{40}+a \quad \text{d'où} \quad a=\frac{1}{10}$$

et, pour $\ell=0$, on a

$$\frac{1}{4}=P([X=0])=\frac{2}{40}+\frac{1}{40}+e+\frac{3}{40} \quad \text{d'où} \quad e=\frac{1}{10}$$

de la même façon, on fera des calculs pour obtenir les résultats $b=\frac{1}{10}$, $c=\frac{3}{40}$, $d=\frac{3}{40}$, $f=\frac{1}{10}$ et $g=\frac{2}{40}$

3. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $k\in\{-1;0;1;2\}$ et $\ell\in\{-2;-1;0;1\}$ on a

$$P([X=k]\cap[Y=\ell])=P([X=k]).P([Y=\ell]).$$

On a prend $k=0$ et $\ell=1$, alors $P([X=0]\cap[Y=1])=P([(X,Y)=(0,1)])=\frac{3}{40}$ et $P([X=0]).P([Y=1])=\frac{1}{4}*\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$; comme $\frac{3}{40}\neq\frac{1}{16}$ alors

$$P([X=0]\cap[Y=1])\neq P([X=0]).P([Y=1])$$

ce qui prouve que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

$\square$

Exercice 5 *(Épreuve répétée de Bernoulli)*
Soit $(\Omega,\mathcal{B},P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{B})$.

1. Soit X une variable aléatoire de Bernoulli, c'est-à-dire telle que

$$X(\Omega)=\{0,1\},\ \ P(X=0)=q,\ \ P(X=1)=p,\ \ 0<p,q<1\ \ p+q=1.$$

   (a) Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de la v. a. $Y=\cos(\pi X)$

   (b) Calculer la covariance entre X et Y, puis calculer le facteur de corrélation $\rho(X,Y)$.

   (c) On note $X_1=X$ et $X_2=Y$. Calculer la matrice de covariance associée. La suite (X_1,X_2) est-elle blanche ?

2. Une épreuve répétée de Bernoulli est donc un système

$$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$$

de variables de Bernoulli indépendantes et ayant toutes la même loi de probabilité rappelée ci-dessus.
On peut désigner l'évènement $X=1$ comme le succès de l'épreuve X, et l'évènement $X=0$ comme l'échec.
La variable aléatoire $Z_n=X_1+X_2+\ldots+X_n$ peut alors être appelée "**compteur de succès**" et $Y_n=\frac{1}{n}Z_n$ peut être appelée "**fréquence de succès**"

(a) Montrer que $E(Z_n) = n.E(X)$ et $E(Y_n) = p$

(b) Montrer que $\text{var}(Z_n) = n.\text{var}(X)$ et $\text{var}(Y_n) = \frac{1}{n}\text{var}(X) = \frac{p(1-p)}{n}$.

3. On note par

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

le vecteur aléatoire formé par l'épreuve répétée de Bernoulli.

(a) Trouver les matrices de covariance pour $n = 2$ et $n = 3$ puis généraliser cette matrice.

(b) Que peut-on déduire ?

(c) Soit A une matrice de taille $n \times n$ et b un vecteur de taille n et soit $Y = AX + b$.

i. Montrer que $E(Y) = AE(X) + b$

ii. Montrer que la matrice de covariance associée à Y est donnée par

$$\mathbf{C}_Y = A\mathbf{C}_X A^T.$$

Solution : Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

1. Soit X une variable aléatoire de Bernoulli, c'est-à-dire telle que

$$X(\Omega) = \{0, 1\}, \;\; P(X = 0) = q, \;\; P(X = 1) = p, \;\; 0 < p, q < 1 \;\; p + q = 1.$$

(a) – La moyenne, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X :
par définition, on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in J_X} xP([X = x])$, donc

$$\mathbb{E}(X) = 0P([X = 0]) + 1P([X = 1]) = 0 * q + 1 * p = p$$

D'après la propriété de Hygens, la variance est $\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - p^2$,
or $\mathbb{E}(X^2) = 0^2 P([X = 0]) + 1^2 P([X = 1]) = 0 * q + 1 * p = p$, alors

$$\sigma^2(X) = p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

L'écart-type est la racine carrée positive de la variance, soit $\sigma(X) = \sqrt{pq}$.

– La moyenne, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire $Y = \cos(\pi X)$: par définition, on a $\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in J_Y} yP([Y = y])$, donc

$$\mathbb{E}(Y) = y_1 P([Y = y_1]) + y_2 P([Y = y_2])$$

l'application $\varphi = \cos(\pi \cdot) : \{0; 1\} \mapsto \{-1; 1\}$ est bijective, alors

$$P([X = 0]) = P([Y = 1]) = q \quad \text{et} \quad P([X = 1]) = P([Y = -1]) = p$$

donc (avec $y_1 = -1$ et $y_2 = 1$) on obtient

$$\mathbb{E}(Y) = -1P([Y = -1]) + 1P([Y = 1]) = -1P([X = 1]) + 1P([X = 0]) = -p + q$$

d'où $\mathbb{E}(Y) = 1 - 2p$.
D'après la propriété de Hygens, la variance est

$$\sigma^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \mathbb{E}(X^2) - (1 - 2p)^2,$$

or $\mathbb{E}(Y^2) = (-1)^2 P([X = 1]) + 1^2 P([X = 0]) = p + q = 1$, alors

$$\sigma^2(X) = 1 - (1 - 2p)^2 = 4p - 4p^2 = 4p(1 - p) = 4pq.$$

L'écart-type est la racine carrée positive de la variance, soit $\sigma(X) = 2\sqrt{pq}$.

(b) – La covariance $\mathrm{Cov}(X,Y)$ entre X et Y : par définition on a

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - p(1-2p)$, donc il reste à calculer $\mathbb{E}(XY)$. On a

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x\in J_X}\sum_{x\in J_X} xyP([(X,Y)=(x,y)])$$

avec $[(X,Y)=(x,y)] = [X=x]\cap[Y=y]$, $J_X=\{0;1\}$ et $J_Y=\{-1;1\}$; ce qui implique

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= 0*(-1)*P([X=0]\cap[Y=-1]) + 0*1*P([X=0]\cap[Y=1]) \\ &\quad +1*(-1)*P([X=1]\cap[Y=-1]) + 1*1*P([X=1]\cap[Y=1]) \\ &= -1*P([X=1]) + 1*P(\emptyset) \\ &= -p\end{aligned}$$

car $[X=0]\cap[Y=-1]=\emptyset$, $[X=0]\cap[Y=1]=\emptyset$, $[X=1]\cap[Y=-1]=[X=1]$ et $[X=1]\cap[Y=1]=\emptyset$; d'où la covariance est

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = -p - p(1-2p) = -2p+2p^2 = -2p(1-p) = -2pq$$

– Le facteur de corrélation $\rho(X,Y)$ entre X et Y : par définition, le facteur de corrélation $\rho(X,Y)$ est

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

donc

$$\rho(X,Y) = \frac{-2pq}{2\sqrt{pq}\,\sqrt{pq}} = -\frac{2pq}{2pq} = -1$$

on en déduit que qu'il y a une forte corrélation entre les variables aléatoires X et Y.

(c) Soit $X_1 = X$ et $X_2 = Y$,

– calculons la matrice de covariance associée : on pose $Z=(X_1,X_2)^T$, par définition la matrice de covariance est

$$C_Z = \mathbb{E}((Z-\mathbb{E}(Z))(Z-\mathbb{E}(Z))^T)$$

on a

$$\begin{aligned}(Z-\mathbb{E}(Z))(Z-\mathbb{E}(Z))^T &= \begin{pmatrix} X-\mathbb{E}(X) \\ Y-\mathbb{E}(Y)\end{pmatrix}\big(X-\mathbb{E}(X), Y-\mathbb{E}(Y)\big) \\ &= \begin{pmatrix} (X-\mathbb{E}(X))^2 & (X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)) \\ (X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)) & (Y-\mathbb{E}(Y))^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ce qui montre que la matrice de covariance est

$$C_Z = \begin{pmatrix} \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) & \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))) \\ \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))) & \mathbb{E}((Y-\mathbb{E}(Y))^2) \end{pmatrix}$$

soit

$$C_Z = \begin{pmatrix} \sigma^2(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \sigma^2(Y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pq & -2pq \\ -2pq & 4pq\end{pmatrix}$$

d'où

$$C_Z = pq\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

- La suite (X_1, X_2) n'est pas une suite blanche, en effet $\sigma^2(X) = pq \neq 4pq = \sigma^2(Y)$ d'une part et d'autre part $\mathrm{Cov}(X,Y) = -2pq \neq 0$.

2. Une épreuve répétée de Bernoulli est donc un système
$$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$
de variables de Bernoulli indépendantes et ayant toutes la même loi de probabilité rappelée ci-dessus.
On peut désigner l'évènement $[X = 1]$ comme le succès de l'épreuve X, et l'évènement $[X = 0]$ comme l'échec.
La variable aléatoire $Z_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ peut alors être appelée "**compteur de succès**" et $Y_n = \frac{1}{n} Z_n$ peut être appelée "**fréquence de succès**"
   (a) Montrons que $\mathbb{E}(Z_n) = n.\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y_n) = p$: D'après la linéarité de $\mathbb{E}$, on a
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n) &= \mathbb{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\ &= \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n) \\ &= \underbrace{\mathbb{E}(X) + \ldots + \mathbb{E}(X)}_{n\text{fois}} \end{aligned}$$
car $(X = X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la variable aléatoire de Bernoulli ; donc il vient
$$\mathbb{E}(Z_n) = n.\mathbb{E}(X).$$
De même, d'après la linéarité de $\mathbb{E}$, on a
$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} Z_n\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{n} n.\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X)$$
comme $X \sim \mathcal{B}(1,p)$ est la variable aléatoire de Bernoulli, alors $\mathbb{E}(X) = p$; d'où $\mathbb{E}(Y_n) = p$.
   (b) – Montrons que $\mathrm{var}(Z_n) = n.\mathrm{var}(X)$:
D'après les propriétés de la variance, on a
$$\begin{aligned} \mathrm{var}(Z_n) &= \mathrm{var}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\ &= \sigma^2(X_1) + \ldots + \sigma^2(X_n) \end{aligned}$$
car les épreuves $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendants ; et comme $X_i \sim \mathcal{B}(1,p)$, alors $\sigma^2(X_i) = \sigma^2(X)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, donc $\mathrm{var}(Z_n) = n\,\sigma^2(X)$.
– Montrons que $\mathrm{var}(Y_n) = \frac{1}{n}\mathrm{var}(X) = \frac{p(1-p)}{n}$:
D'après les propriétés de la variance, on a
$$\mathrm{var}(Y_n) = \mathrm{var}\left(\frac{1}{n} Z_n\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{var}\,(Z_n) = \frac{1}{n^2} n\,\sigma^2(X) = \frac{1}{n}\,\sigma^2(X)$$
comme $X \sim \mathcal{B}(1,p)$ est la variable aléatoire de Bernoulli, alors $\sigma^2(X) = pq = p(1-p)$; d'où $\sigma^2(Y_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.

3. Soit $\mathbf{X}$ le vecteur aléatoire formé par l'épreuve répétée de Bernoulli donné par
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$
On a
$$\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} X_1 - \mathbb{E}(X_1) \\ \vdots \\ X_n - \mathbb{E}(X_n) \end{pmatrix}$$

Par définition, la matrice de covariance $C_{\mathbf{X}}$ est

$$C_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}((\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))^T)$$

(a) – pour $n = 2$, la matrice de covariance $C_{\mathbf{X}}$ est

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{X}} &= \begin{pmatrix} \mathbb{E}((X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2) & \mathbb{E}((X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))) \\ \mathbb{E}((X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))) & \mathbb{E}((X_2 - \mathbb{E}(X_2))^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma^2(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) \\ \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \sigma^2(X_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

comme les variables X_1 et X_2 sont des épreuves indépendants, alors $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$; donc

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} pq & 0 \\ 0 & pq \end{pmatrix} = pq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = pqI_2$$

où I_2 est la matrice identité de taille (2×2).

– pour $n = 3$, la matrice de covariance $C_{\mathbf{X}}$ est

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \sigma^2(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \mathrm{Cov}(X_1, X_3) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \sigma^2(X_2) & \mathrm{Cov}(X_2, X_1) \\ \mathrm{Cov}(X_3, X_1) & \mathrm{Cov}(X_3, X_2) & \sigma^2(X_3) \end{pmatrix}$$

comme les variables X_i et X_j sont des épreuves indépendants, alors $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ pour $i \neq j$ et $\sigma(X_i) = pq$; donc

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} pq & 0 & 0 \\ 0 & pq & 0 \\ 0 & 0 & pq \end{pmatrix} = pq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = pqI_3$$

où I_3 est la matrice identité de taille (3×3).

– pour n quelconque, comme les variables X_i et X_j sont des épreuves indépendants, alors $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ pour $i \neq j$ et $\sigma(X_i) = pq$; donc la matrice de covariance $C_{\mathbf{X}}$ est

$$C_{\mathbf{X}} = pqI_n$$

où I_n est la matrice identité de taille $(n \times n)$.

(b) D'après la question 3.(a), on en déduit que la suite $(X_1, \ldots, X_n)$ vérifie les propriétés suivantes

– la covariance est nulle entre les variables $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, soit $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ pour $i \neq j$,

– la variance est constante pour toutes les variables de la suite, soit $\sigma^2(X_i) = pq$ pour tout $1 \leq i \leq n$ ou la matrice de covariance

$$C_{\mathbf{X}} = pqI_n$$

ce qui prouve que le système $(X_1, \ldots, X_n)$ est une suite blanche.

(c) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice et $b = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ un vecteur et soit $Y = AX + b$. On a

$$Y = AX + b = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j}X_j + b_1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{2j}X_j + b_2 \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{nj}X_j + b_n \end{pmatrix}$$

i. Montrons que $\mathbb{E}(Y) = A\mathbb{E}(X) + b$: d'après la linéarité de $\mathbb{E}$, on a

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(AX+b) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\mathbb{E}(X_j) + b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\mathbb{E}(X_j) + b_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\mathbb{E}(X_j) + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\mathbb{E}(X_j) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\mathbb{E}(X_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\mathbb{E}(X_j) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

d'où il vient $\mathbb{E}(Y) = A\mathbb{E}(X) + b$.

ii. Montrons que la matrice de covariance associée à Y est donnée par $\mathbf{C}_Y = A\mathbf{C}_X A^T$: par définition, on a

$$\begin{aligned} C_Y &= \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y))(Y - \mathbb{E}(Y))^T) \\ &= \mathbb{E}((A(X - \mathbb{E}(X)))(A(X - \mathbb{E}(X)))^T) \\ &= \mathbb{E}((A(X - \mathbb{E}(X)))(X - \mathbb{E}(X))^T A^T) \\ &= A\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))^T)A^T \end{aligned}$$

comme $C_X = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))^T)$, alors $C_Y = AC_X A^T$ est la matrice de covariance de la variable Y.

$\square$